10. DERIBATUEN APLIKAZIOAK. (x_0 emanda)

279. or. $\boxed{1}$ a) $y = \dfrac{5x^3+7x^2-16x}{x-2}$ $x=0$, $x=1$, $x=3$ puntuetan.

Ukitzailearen ekuazioa: $\boxed{y = y_0 + m(x-x_0)}$ edo $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$

· Ekuazioan ordezkatzeko puntua $P(x_0, y_0)$ eta $f'(x_0)$ behar da:

· Deribatua: $y' = \dfrac{(15x^2+14x-16)(x-2)-(5x^3+7x^2-16x)}{(x-2)^2}$

$$y' = \frac{15x^3-30x^2+14x^2-28x-16x+32-5x^3-7x^2+16x}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{10x^3-23x^2-28x+32}{(x-2)^2}$$

· x_0 bakoitzarentzako y_0 eta $f'(x_0)$ kalkulatu:

* $\underline{x=0} \rightarrow f(0)=0 \rightarrow \boxed{P_1(0,0)}$ $m=f'(0)=\frac{32}{4}=8$

* $\underline{x_1=1} \rightarrow f(1)=\dfrac{5\cdot1+7\cdot1-16\cdot1}{1-2}=4 \rightarrow \boxed{P(1,4)}$

$$f'(1) = \frac{10\cdot1-23-28+32}{(1-2)^2} = \boxed{-9}$$

* $\underline{x_2=3} \rightarrow f(3)=\dfrac{5\cdot3^3+7\cdot3^2-16\cdot3}{3-2}=150 \rightarrow \boxed{P(3,150)}$

$$f'(3) = \frac{10\cdot3^3-23\cdot3^2-28\cdot3+32}{(3-2)^2} = \boxed{11}$$

UKITZAILEAK

$y_1 = 0 + 8(x-0)$
$y_2 = 4 - 9(x-1)$
$y_3 = 150 + 11(x-3)$
$\Longrightarrow$
$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = 8x \\ y_2 = -9x+13 \\ y_3 = 11x+117 \end{array}}$

279) 1 **b)** $x^2+y^2-2x+4y-24=0$. (Inplizituak) 9.2

$x_0=3$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa orokorra $P(x_0, y_0)$ eta $f'(x_0)=m$ behar da.

- PUNTUA KALKULATZEKO

$$3^2+y^2-2\cdot 3+4\cdot y-24=0$$
$$9+y^2-6+4y-24=0$$
$$y^2+4y-21=0$$
$$y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-21)}}{2}=\begin{cases} y_1=3 \\ y_2=-7\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} P_1(3,3) \\ P_2(3,-7)\end{matrix}}$$

- DERIBATUA (inplizituak)

$$2x+2yy'-2+4y'=0.$$
$$y'(2y+4)=2-2x$$
$$y'=\frac{2-2x}{2y+4} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1-x}{y+2}}$$

- MALDA → DERIBATUA PUNTUAN DA

$$P_1(3,3) \rightarrow y'=\frac{1-3}{3+2}=\boxed{\frac{-2}{5}}$$

$$P_2(3,-7) \rightarrow y'=\frac{1-3}{-7+2}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

- UKITZAILEAK $\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$

$$y_1=3+\left(\frac{-2}{5}\right)(x-3) \longrightarrow y_1=\frac{-2}{5}x+\frac{21}{5}$$

$$y_2=-7+\frac{2}{5}(x-3) \longrightarrow y_2=\frac{2}{5}x-\frac{41}{5}$$

9.3.

c) $y=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-6$. (m emonda)

$y-x=9$. zuzenarekiko paraleloa.

- Ukitzailea $y-x=9$ zuzenarekiko paraleloa bada, malda bardina izango dabe

$$y-x=9 \longrightarrow y=9+x \longrightarrow \boxed{m=1}$$

- Malda, funtzioaren deribatua puntuan da, beraz; funtzioa deribatuko da, eta $m=1$-ekin bardindu.

$$\boxed{f'(x_0)=m}$$

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-6$$

$$y'=f'(x)=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}-2x+3$$

- Bardintzen da $m=1$.

$$x^2-2x+3=1$$

$$x^2-2x+2=0$$

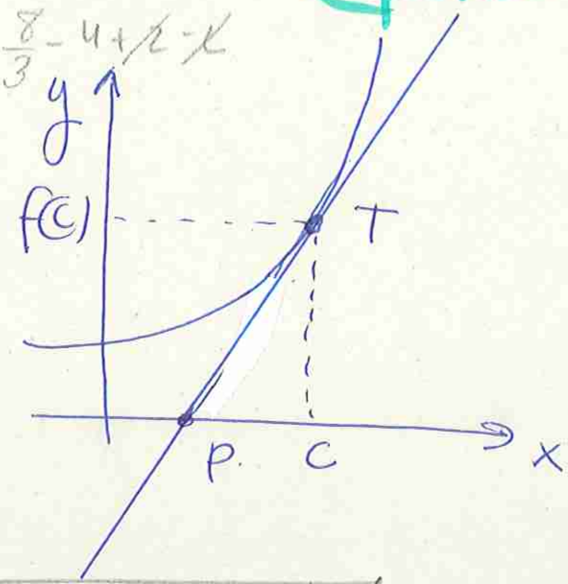
$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$\nexists x$, ez dago puntuik non ukitzailea $y-x=9$ zuzenaren paraleloa dan.

9.4

d) $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x-2$ P(2,0) (Kaupoko puntua)

$\frac{8}{3}-4+\cancel{2}-\cancel{2}$



· P(2,0) kaupoko puntua da

Bi puntuen artiko malda, T eta P, eta deribatua T puntuan bardinak dira

(1) Malda planteatu m_{TP}

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

P(2,0)

T(c, f(c))

$$f(c)=\frac{c^3}{3}-c^2+c-2$$

$$\boxed{m=\frac{\frac{c^3}{3}-c^2+c-2-0}{c-2}}$$

(2) Deribatua T puntuan

$$f'(x)=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}-2x+1$$

$$\boxed{f'(c)=c^2-2c+1}$$

(3) Bardindu $\boxed{m=f'(c)}$

$$\frac{\frac{c^3}{3}-c^2+c-2}{c-2}=c^2-2c+1$$

$$\frac{c^3}{3}-c^2+\cancel{c}-\cancel{2}=c^3-2c^2+\cancel{c}-2c^2+4c-\cancel{2}$$

$$\frac{c^3}{3}-c^2=c^3-4c^2+4c$$

$$c^3=3c^3-9c^2+12c \longrightarrow$$

$$2c^3-9c^2+12c=0$$

$$c(2c^2-9c+12)=0$$

$$c=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 2\cdot 12}}{2\cdot 2}=\nexists$$

$$\boxed{c=0}$$

T puntua $\longrightarrow$ T(c, f(c))

$$\boxed{T(0,-2)}$$

$$f'(0)=0^2-0c+1=1 \longrightarrow \boxed{m=1}$$

(4) Zuzen ukitzailea

$$\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$$

$$y=-2+1(x-0)$$

$$\boxed{y=x-2}$$

9.5

297. orr. Zuzen ukitzaileen ekuazioak

1a) $y = \ln(tg\, 2x) \quad x = \pi/8.$

Zuzen ukitzailea $y = y_0 + m(x - x_0)$

edo $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

- $P(x_0, y_0)$

$x = \pi/8 \rightarrow f(\pi/8) = \ln \underbrace{tg\left(\frac{\pi}{8}\cdot 2\right)}_{1} = 0 \rightarrow \boxed{P\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)}$

- Maldo = Deribatua $x = \pi/8$ denean:

$f'(x) = \frac{1}{tg\, 2x}\cdot 2\cdot(1 + Tg^2(2x))$

$f'(\pi/8) = \frac{1}{\underbrace{tg(\pi/8\cdot 2)}_{1}}\cdot 2(1 + \underbrace{tg^2\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}_{1}) = \boxed{4}$

- ukitzailea

$P(\pi/8, 0)$
$m = 4.$
$\rightarrow y = 0 + 4(x - \pi/8) \rightarrow \boxed{y = 4x - \frac{\pi}{2}}$

b) $y = \sqrt{\sin 5x} \quad x_0 = \pi/6.$

- $P(x_0\, y_0)$

$x_0 = \pi/6$

$f(\pi/6) = \sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{\sin 150} = \sqrt{\sin 30} =$
$= 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

$\boxed{P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

- Maldo

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 5x}}\cdot\cos(5x)\cdot 5 = \frac{5\cos(5x)}{2\sqrt{\sin(5x)}}$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{\cos(5\pi/6)}{\sqrt{\sin(5\pi/6)}} = \frac{5}{2}\frac{\cos 150}{\sqrt{\sin 150}} =$

$= \frac{5(-\cos 30^\circ)}{2\sqrt{\sin 30}} = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{1/2}} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{5\sqrt{6}}{4}}$

ukitzailea $\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \pi/6\right)}$

9.6

c) $x^2+y^2-2x-8y+15=0 \quad x_0=2$ INPLIZIT.

- $P(x_0, y_0)$

$$2^2+y^2-2\cdot 2-8y+15=0$$
$$\cancel{4}+y^2-\cancel{4}-8y+15=0$$
$$y^2-8y+15=0.$$

$$y=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}= \begin{cases} y_1=5 \\ y_2=3. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} P_1(2,5) \\ P_2(2,3) \end{matrix}}$$

- Deribatua

$$2x+2yy'-2-8y'=0$$
$$y'(2y-8)=2-2x$$
$$y'=\frac{2-2x}{2y-8}$$
$$\boxed{y'=\frac{1-x}{y-4}}$$

- Maldak

$$P_1(2,5)\longrightarrow y'=\frac{1-2}{5-4}=\boxed{-1}$$
$$P_2(2,3)\longrightarrow y'=\frac{1-2}{3-4}=\boxed{1}$$

- Ukitzaileak

$$\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$$

- $P_1(2,5) \quad m_1=-1$

$$y=5-1(x-2)$$
$$\boxed{y_1=-x+7}$$

- $P_2(2,3) \quad m_2=1$

$$y=3-1(x-2)$$
$$\boxed{y_2=-x+5}$$

d) $y=(x^2+1)^{\sin x}$ $x_0=0$.

Zuzen ukitzailea $y=y_0+m(x-x_0)$

- Puntua (x_0, y_0)

$x_0=0 \longrightarrow y=(0^2+1)^{\sin 0}=1^0=1 \longrightarrow \boxed{P(0,1)}$

- Deribatua

$y=(x^2+1)^{\sin x}$ Deribatu logaritmikoa.

$\ln y=\ln (x^2+1)^{\sin x}$

$\ln y=\sin x \cdot \ln(x^2+1)$

$\frac{y'}{y}=\cos x \cdot \ln(x^2+1)+\sin x \frac{2x}{x^2+1}$

$y'=y\left[\cos x \cdot \ln(x^2+1)+\frac{2x \cdot \sin x}{x^2+1}\right]$

$y'=(x^2+1)^{\sin x}\cdot\left[\cos x \cdot \ln(x^2+1)+\frac{2x \sin x}{x^2+1}\right]$

- Malda

$P(0,1) \rightarrow y'=(0^2+1)^{\sin 0}\cdot\left[\cos 0 \cancel{\ln(1)}^{0}+\cancel{\frac{2\cdot 0 \cdot \sin 0}{0^2+1}}^{0}\right]$

$y'=0 \longrightarrow \boxed{m=0}$

- Ukitzailea

$P(0,1)$
$m=0$ $\longrightarrow y=1+0(x-0)$

$\boxed{y=1}$

297. om' $\boxed{2}$ $y = \dfrac{2x}{x-1}$ ren ukitzaileak $2x+y=0$ rekiko parolel.

297.

- Ukitzaileo eta zuzena PARALELAK badira ⟶ MALDA BARDINA

$$2x+y=0 \longrightarrow y=-2x \longrightarrow \boxed{m=-2}$$

- Malda, deribatua x_0 puntuan da, beraz deribatu kalkulatu

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-2x\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

- Maldarekin berdindut:

$$\frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \Longrightarrow -2 = -2(x-1)^2$$

$$1 = (x-1)^2$$

$$\cancel{1} = x^2 - 2x + \cancel{1}$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{x_2 = 2}$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \longrightarrow f(0) = \frac{2\cdot 0}{0-1} = 0 \longrightarrow P_1(0,0)$$

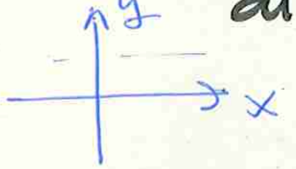
$$x_2 = 2 \longrightarrow f(2) = \frac{2\cdot 2}{2-1} = 4 \longrightarrow P_2(2,4)$$

<u>Ukitzaileak</u>

$$y_1 = 0-2(x-0) \longrightarrow y_1 = -2x$$

$$y_2 = 4-2(x-2) \longrightarrow y_2 = -2x+8$$

297. $\boxed{3}$ kalkulatu x ardatzarekiko $\parallel$ diren zuzen ukitzaileak.



Berat ukitzaileen malda $\boxed{m=0}$

beraz $f'(x_0)=0$

a) $y = x \cdot \ln x$.

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$m=0 \longrightarrow \ln x + 1 = 0$.

$\ln x = -1$

$e^{-1} = x$.

$f(e^{-1}) = \frac{\ln e^{-1}}{e} = -\frac{1}{e}$.

$\boxed{P\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)}$

Ukitzailea $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = \frac{-1}{e} + 0 \cdot (x - e^{-1})$

$\boxed{y = -1/e}$

b) $y = x^2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$m=0 \quad 2xe^x + x^2 \cdot e^x = 0$

$e^x(2x + x^2) = 0$

$e^x \neq 0$

$2x + x^2 = 0$

$x(2+x) = 0$ $\begin{cases} \boxed{x_1 = 0} \\ \boxed{x_2 = -2} \end{cases}$

$x_1 = 0$

$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$

$\boxed{P_1(0,0)}$

$x_2 = -2$

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = 4 \cdot e^{-2}$

$\boxed{P_2(-2, 4e^{-2})}$

Ukitzaileak $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y_1 = 0 + 0(x-0) \longrightarrow \boxed{y_1 = 0.}$

$y_2 = 4e^{-2} + 0 \cdot (x+2) \longrightarrow \boxed{y_2 = 4 \cdot e^{-2}}$

c) $y = \sin 2x$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

$m = 0 \longrightarrow 2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k \longrightarrow y_1 = 1 \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \longrightarrow x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k \longrightarrow y_2 = -1 \end{cases}$$

$P_1 \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, 1\right) \quad k \in \mathbb{R}$

$P_2 \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right) \quad k \in \mathbb{R}$

UKITZAILEAK

$y_1 = 1 + 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4} + \pi k\right) \longrightarrow y_1 = 1$

$y_2 = -1 + 0\left(x - \frac{3\pi}{4} + \pi k\right) \longrightarrow y_2 = -1$

(4) HAZKUNDE - TARTEAK (ariketa ebatzia)

Aztertu HAZKUNDEA, MAX, MIN

$$f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1)$$

Funtzioa jarraia eta deribagarria da $\mathbb{R}$ bere definizio eremu osoan.

- Hazkundea aztertzeko $f'(x)$: $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ GORAK} \\ f'(x) < 0 \text{ BEHERA} \end{array} \right.$

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1) + e^x (2x - 3) =$$

$$f'(x) = e^x (x^2 - x - 2)$$

- $f'(x) = 0$ puntuak bilatzen ditugu.

$$\underbrace{e^x}_{0} \cdot \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{0} = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} e^x \neq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array} \right.$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

		-1		2	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f'(x)$	+	max	−	min	+

G. TARTEA $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

B. TARTEA $(-1, 2)$

max $(-1, 5/e)$ $\qquad f(-1) = e^{-1} \cdot 5 \cdot\ 5/e$

min $(2, -e^2)$ $\qquad f(2) = e^2(-1)$

4b Ariketa ebatziak

9.12

b) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & x\leq 0 \\ x\ln x & x>0 \end{cases}$

Jarraitasuna $x=0$

$f(0)=0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2-2x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0. \end{array}\right\}$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Jarraia $\mathbb{R}$ osoan.

Deribagarritasuna

$f'(x)=\begin{cases} -2x-2 & x<0 \\ 1+\ln x & x>0. \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-2\cdot 0-2=-2 \\ f'(0^+)=1+\ln 0=1 \end{array}\right\}$ Ez da deribag. $x=0$

Hazkundea

Deribatua nulua noiz den aztertu: $f'(x)=0$

$\begin{cases} -2x-2=0 \longrightarrow x=-1. & x<0 \\ 1+\ln x=0 \longrightarrow \ln x=-1 \\ \quad x=e^{-1} & x>0. \end{cases}$

		-1		0		1/e	
$f(x)$	↗		↘		↘		↗
$f'(x)$	+	MAX	−		−	MIN	+

G. TARTEA $(-\infty, 1) \cup (1/e, +\infty)$

B. TARTEA $(-1, 0) \cup (0, 1/e)$

MAX $(-1, 1)$

MIN $(1/e, -1/e)$